

Sveučilište u Zagrebu
Fakultet kemijskog inženjerstva i tehnologije
Zavod za matematiku

Kolegij: Matematičke metode u kemijskom inženjerstvu

METODE KONAČNIH ELEMENATA I KONAČNIH
RAZLIKA

Neven Ukrainczyk
3119

Zagreb, travanj 2003.

METODE KONAČNIH ELEMENATA I KONAČNIH RAZLIKA

Sadržaj

I Uvod	2
II Bazne funkcije konačnih elemenata	3
III Ustaljeno vođenje topline	17
IV Neustaljeno vođenje topline	30
V Literatura	37

I Uvod

U prvom poglavlju opisana je osnova metode konačnih elemenata na problemu nalaženja funkcijske veze iz eksperimentalnih podataka. Tom metodom domena rješenja je podijeljena na dovoljno male dijelove, tako da se na svakom takvom dijelu funkcija jednostavno izražava pomoću izabranih polinomskih funkcija-bazne funkcije. Takvi mali dijelovi područja nazivaju se konačni elementi, a sam postupak podjele naziva se diskretizacija na konačne elemente ili metoda konačnih elemenata. Metoda ima široke granice primjenjivosti jer je jednostavna za algoritmizaciju. Naime, izborom istog oblika konačnog elementa za diskretizaciju cijelog područja, problem se svodi na rješavanje problema na jednom elementu, dok se na ostalima ponavlja, što je prikladno za primjenu elektroničkih računala.

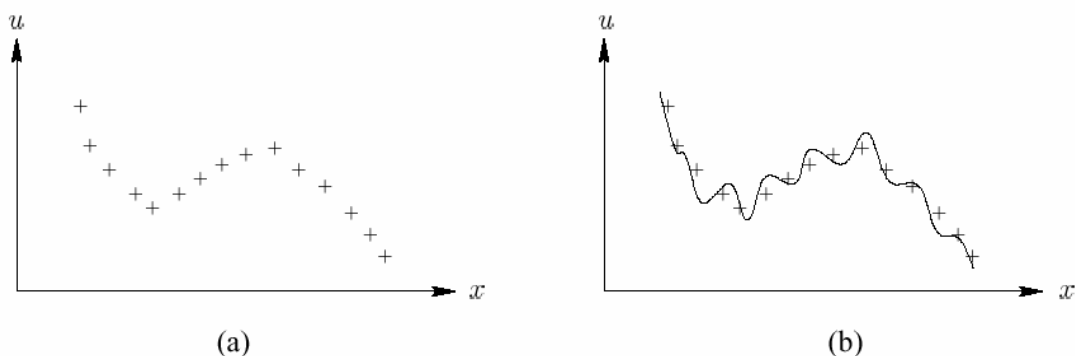
U drugom poglavlju prikazana je primjena kod rješavanja diferencijalne jednadžbe stacionarnog vođenja topline, dakle gdje je funkcija za koju se traži približenje zadana diferencijalnim operatorom i određenim rubnim uvjetima.

U trećem poglavlju opisana je osnova metode konačnih razlika. Prednost metode konačnih elemenata nad metodom konačnih razlika jest mogućnost formiranja kompleksnih granica koje definiraju domenu rješenja. U vremenski ovisnim problemima rješenje započinje u početnom uvjetu $t = 0$, i zatim se računa svako novo rješenje pri konstantnim vremenom ($t > 0$) na cijeloj prostornoj domeni rješenja Ω . Stoga nije potrebna fleksibilnost konačnih elemenata za diskretizaciju vremenske domene nego se koristi metoda konačnih razlika. Ova metoda je opisana kod rješavanja problema neustaljenog vođenja topline. Zatim je uzeta kombinacija konačnih elemenata, za prostornu domenu i konačnih razlika za vremensku domenu pri rješavanju nestacionarne advekcijsko-difuzijske jednadžbe – generalizirani oblik jednadžbe prijenosa topline ili tvari.

II BAZNE FUNKCIJE KONAČNIH ELEMENATA

Jednodimenzionalno polje

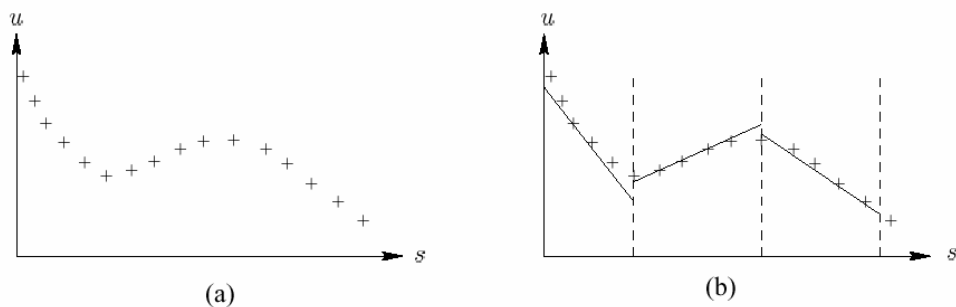
Na slici 1.1a prikazan je problem nalaženja matematičkog izraza $u(x)$ koji opisuje jednodimenzionalno polje (npr. izmjerena temperatura u zavisno o duljini šipke x).



Slika 1.1: (a) Distribucija temperature $u(x)$ po duljini šipke. (b) Polinomska funkcijska veza nađena metodom najmanjih kvadrata – neprihvatljive oscilacije između točaka.

Jedan od načina nalaženja tražene funkcijske veze jest odabir polinomskog izraza $u(x) = a + b x + c x^2 + d x^3 + \dots$, čiji se parametri a , b , c i d određuju metodom najmanjih kvadrata. Povećanjem stupnja polinoma povećava se točnost ovog postupka, ali se javljaju neprihvatljive oscilacije (slika 1.1a). Polinomski izraz je prikladan jer se lako derivira i integrira. Stoga je ovaj pristup zadovoljavajući samo za polinome niskog stupnja.

Da bi zadržali prednosti a odbacili mane, dijelimo šipku na elemente. Time je omogućeno korištenje polinoma niskog stupnja uz veliku točnost. Na slici 1.2a temperatura u je prikazana u ovisnosti o duljini luka s . Ukupnu duljinu luka dijelimo na tri elementa i metodom najmanjih kvadrata odredimo linearni polinom koji opisuje funkcijsku ovisnost na pojedinom elementu (slika 1.2b).



Slika 1.2: (a) Izmjerena temperatura u u ovisnosti o duljini luka s . (b) Podjela domene na tri elementa u kojima linearni polinomi opisuju ovisnost.

Linearne bazne funkcije

Dobivena funkcija u , sastavljena od pojedinačnih linearnih polinoma je prekinuta na spojištima (granicama) elemenata (slika 1.2b). Očigledno je da se mora osigurati barem neprekinutost funkcije, dakle rješenje mora biti najmanje iz klase C^0 . Rjeđe se zahtjeva da je prva derivacija neprekinuta, tj. da se približno rješenje traži iz klase C^1 . Neprekinutost funkcije u se može osigurati vrijednostima parametara a, b, c, \dots , ali je bolje rješenje zamjena tih parametara s vrijednostima funkcije u na granicama elemenata. Linearna ovisnost između tih dviju vrijednosti za prvi element glasi:

$$u(\xi) = (1 - \xi)u_1 + \xi u_2$$

gdje je ξ ($0 \leq \xi \leq 1$) normalizirana mjera udaljenosti na krivulji.

Definiramo:

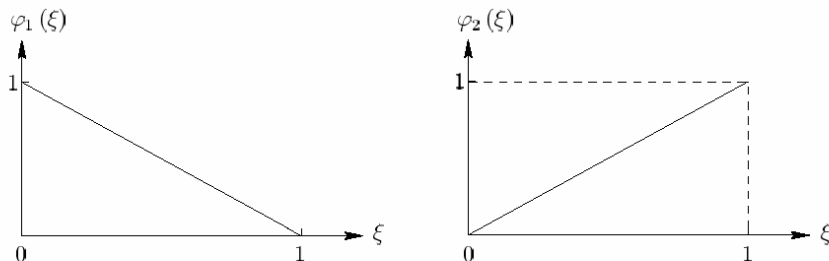
$$\varphi_1(\xi) = 1 - \xi$$

$$\varphi_2(\xi) = \xi$$

tako da je:

$$u(\xi) = \varphi_1(\xi)u_1 + \varphi_2(\xi)u_2$$

i nazivamo ih *baznim* funkcijama pridruženim čvornim parametrima u_1 i u_2 . Bazne funkcije $\varphi_1(\xi)$ i $\varphi_2(\xi)$ su linearne i variraju između 0 i 1, kako je prikazano na slici 1.3. To su zapravo *Langrangeovi* polinomi prvog stupnja, čije se interpolacijske točke nalaze na rubovima elemenata.



Slika 1.3: Linearne bazne funkcije $\varphi_1(\xi) = 1 - \xi$ i $\varphi_2(\xi) = \xi$

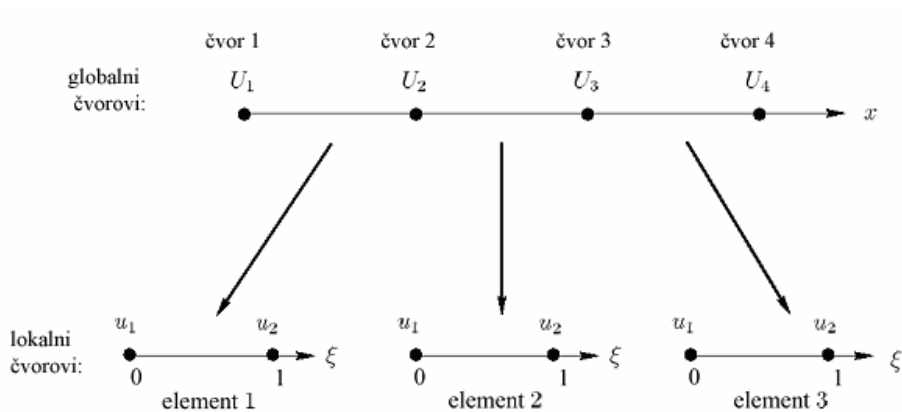
Prikladno je uvijek pridružiti čvorni iznos u_n lokalnom čvoru n i zatim prikazati temperaturu U_Δ definiranu na globalnom čvoru Δ , koja odgovara lokalnom čvoru n elementa e , koristeći matricu pridruživanja $\Delta(n, e)$ tj.:

$$u_n = U_{\Delta(n,e)}$$

gdje je $\Delta(n, e)$ broj globalnog čvora koji odgovara lokalnom čvoru n elementa e . To ima prednosti jer interpolacija:

$$u(\xi) = \varphi_1(\xi)u_1 + \varphi_2(\xi)u_2$$

vrijedi za svaki element, omogućujući da su u_1 i u_2 korektno identificirani sa svojim globalnim čvorom, kako je prikazano na slici 1.4.



Slika 1.4: Odnos globalnih i lokalnih čvorova.

Tako je u prvom elementu u interpolirana s:

$$u(\xi) = \varphi_1(\xi)u_1 + \varphi_2(\xi)u_2 \quad (1.1)$$

gdje su $u_1 = U_1$ i $u_2 = U_2$.

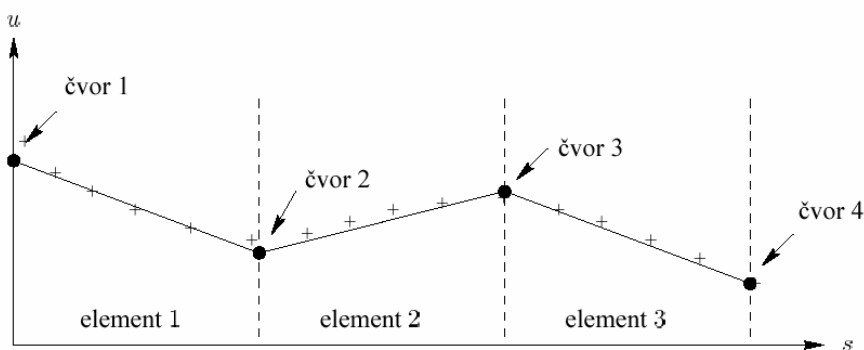
U drugom elementu u je interpolirana s:

$$u(\xi) = \varphi_1(\xi)u_1 + \varphi_2(\xi)u_2 \quad (1.2)$$

gdje su $u_1 = U_2$ i $u_2 = U_3$, jer je parametar U_2 zajednički prvom i drugom elementu. Time je osigurano neprekidno temperaturno polje u . Slično, u trećem elementu u je interpolirana sa:

$$u(\xi) = \varphi_1(\xi)u_1 + \varphi_2(\xi)u_2 \quad (1.3)$$

gdje je $u_1 = U_3$ i $u_2 = U_4$, sa zajedničkim parametrom U_3 drugog i trećeg elementa. Na slici 1.5 prikazano je temperaturno polje definirano s tri interpolacije (1.1) – (1.3).



Slika 1.5: Izmjereno temperaturno polje opisano čvornim parametrima i linearnim baznim funkcijama, koje je sad neprekidno na spojištima elemenata.

Bazne funkcije – težinske funkcije

Bazne funkcije se mogu smatrati kao težinske funkcije čvornog parametra. Tako, u elementu 1 pri

$$\xi = 0 \quad u(0) = (1-0)u_1 + 0u_2$$

koja je jednaka vrijednosti u na lijevom kraju elementa i ne ovisi o u_2 . Pri

$$\xi = \frac{1}{4} \quad u\left(\frac{1}{4}\right) = \left(1 - \frac{1}{4}\right)u_1 + \frac{1}{4}u_2 = \frac{3}{4}u_1 + \frac{1}{4}u_2$$

koja ovisi o u_1 i u_2 , ali je veće težište stavljeno prema u_1 . Pri

$$\xi = \frac{1}{2} \quad u\left(\frac{1}{2}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right)u_1 + \frac{1}{2}u_2 = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}u_2$$

koja jednako ovisi o u_1 i u_2 . Pri

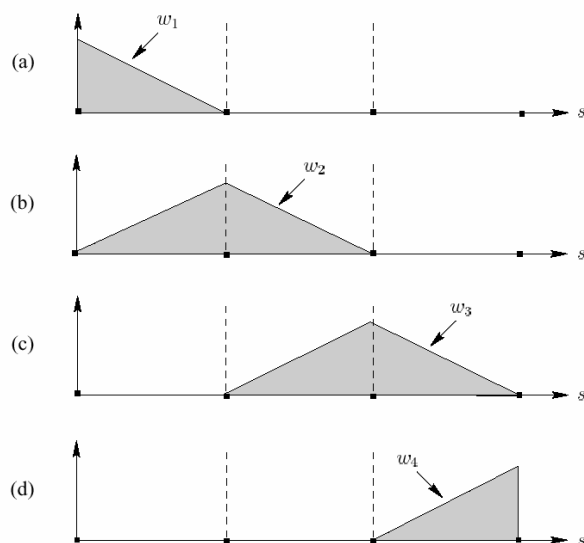
$$\xi = \frac{3}{4} \quad u\left(\frac{3}{4}\right) = \left(1 - \frac{3}{4}\right)u_1 + \frac{3}{4}u_2 = \frac{1}{4}u_1 + \frac{3}{4}u_2$$

koja ovisi o u_1 i u_2 , ali je veće težište stavljeno prema u_2 . Pri

$$\xi = 1 \quad u(1) = (1-1)u_1 + 1u_2 = u_2$$

koja je jednaka vrijednosti u na desnom kraju elementa i ne ovisi o u_1 .

Nadalje ove se težinske funkcije mogu smatrati kao *globalne* funkcije, kako je to prikazano na slici 1.6, gdje je težinska funkcija w_n pridodijeljena globalnom čvoru n i konstruirana od baznih (*oblikovnih*) funkcija elemenata susjednih tom čvoru. Težinska funkcija se definira na cijelom području, s tim da je intenzivna na ograničenom području, tj. na elementima koji sadrže taj čvor, a izvan toga jednaka je nuli.



Slika 1.6: (a)...(b) Težinske funkcije w_n pridodijeljene globalnim čvorovima $n = 1 \dots 4$.

Npr., ω_n daje težište globalnom parametru U_2 tako da utjecaj U_2 pada linearno u susjednim elementima čvora 2.

Sada imamo definirano temperaturno polje $u(\xi)$, ali kako nas zanima $u(x)$ moramo odrediti vezu između x i ξ za svaki element. Prikladan način da to odredimo je definirati x kao interpolaciju čvornih vrijednosti x .

Npr., za element 1

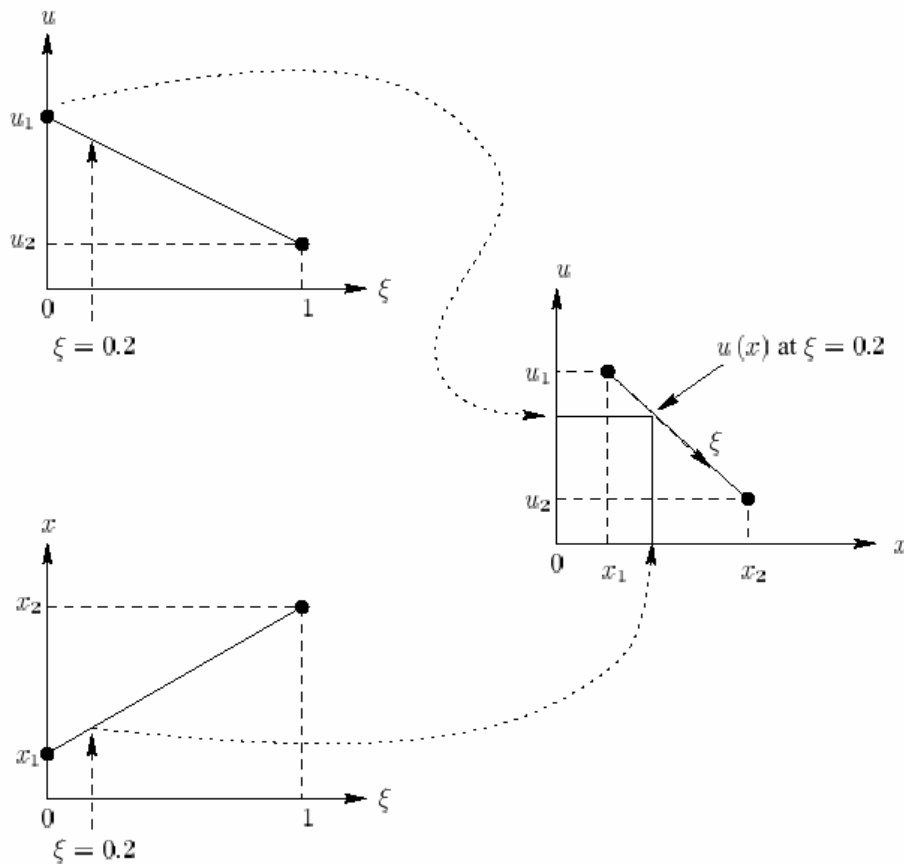
$$x(\xi) = \varphi_1(\xi)x_1 + \varphi_2(\xi)x_2$$

gdje je $[x_1, x_2]$ prvi element. Slično za ostala dva elementa. Ovisnost temperature o x , $u(x)$, je stoga definirana parametarski:

$$u(\xi) = \sum_n \varphi_n(\xi)u_n$$

$$x(\xi) = \sum_n \varphi_n(\xi)x_n$$

gdje se sumira po svim lokalnim čvorovima (u ovom slučaju samo 2, tj. $n = 1, 2$). Parametar ξ (koordinata elementa) povezuje temperaturu u s fizikalnim položajem x . $x(\xi)$ daje vezu između matematičkog prostora $0 \leq \xi \leq 1$ i fizikalnog prostora $x_1 \leq x \leq x_2$, kako je to ilustrirano slikom 1.7.



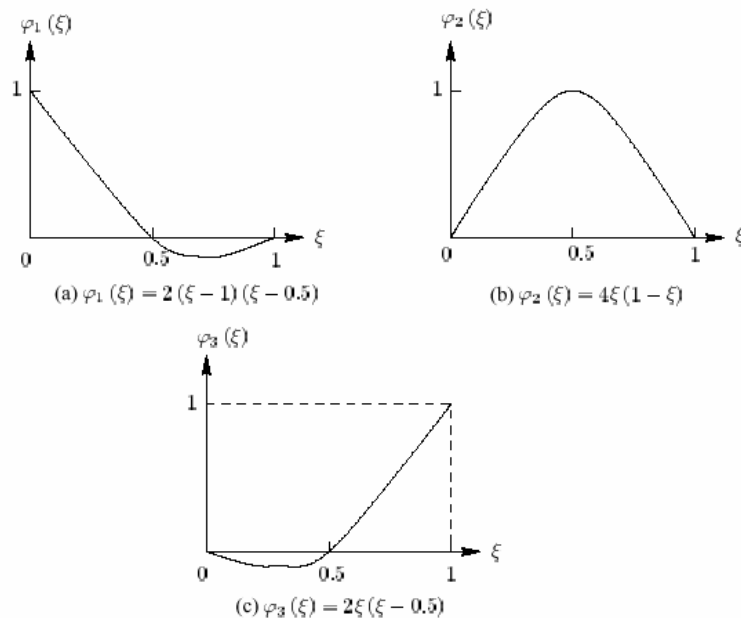
Slika 1.7: Veza u i x preko normalizirane kordinate elementa ξ .

Kvadratna bazna funkcija

Esencijalno svojstvo bazne funkcije jest da bazna funkcija pridružena određenom čvoru poprima vrijednost 1 kada je računata za taj čvor, 0 kada je računata za svaki drugi čvor u elementu (samo jedan drugi čvor u slučaju linearne bazne funkcije). To osigurava linearnu ovisnost baznih funkcija. Kod baznih funkcija višeg stupnja ključno je ustanoviti njen oblik. Npr., za kvadratnu ovisnost u na elementu su potrebna tri čvorna parametra u_1 , u_2 i u_3 :

$$u(\xi) = \varphi_1(\xi)u_1 + \varphi_2(\xi)u_2 + \varphi_3(\xi)u_3 \quad (1.5)$$

Kvadratne bazne funkcije sa svojim matematičkim izrazima prikazane su na slici 1.8. Kako $\varphi_1(\xi)$ mora iznositi nula za $\xi = 0.5$ (čvor 2), $\varphi_1(\xi)$ ima faktor $(\xi - 0.5)$, a kako mora također biti nula za $\xi = 1$ (čvor 3), drugi faktor je $(\xi - 1)$. Konačno, kako $\varphi_1(\xi)$ je 1 za $\xi = 0$ (čvor 1), imamo $\varphi_1(\xi) = 2(\xi - 1)(\xi - 0.5)$. Slično je za druge dvije bazne funkcije.



Slika 1.8: Jednodimenzionalne kvadratne bazne funkcije.

Dvo- i tro-dimenzionalni elementi

Dvodimenzionalna bilinearna (linearna na ξ_1 i ξ_2 koordinati) bazna funkcija je konstruirana od produkta prije navedenih jednodimenzionalnih linearnih funkcija, tj:

$$u(\xi_1, \xi_2) = \varphi_1(\xi_1, \xi_2)u_1 + \varphi_2(\xi_1, \xi_2)u_2 + \varphi_3(\xi_1, \xi_2)u_3 + \varphi_4(\xi_1, \xi_2)u_4$$

gdje je

$$\varphi_1(\xi_1, \xi_2) = (1 - \xi_1)(1 - \xi_2)$$

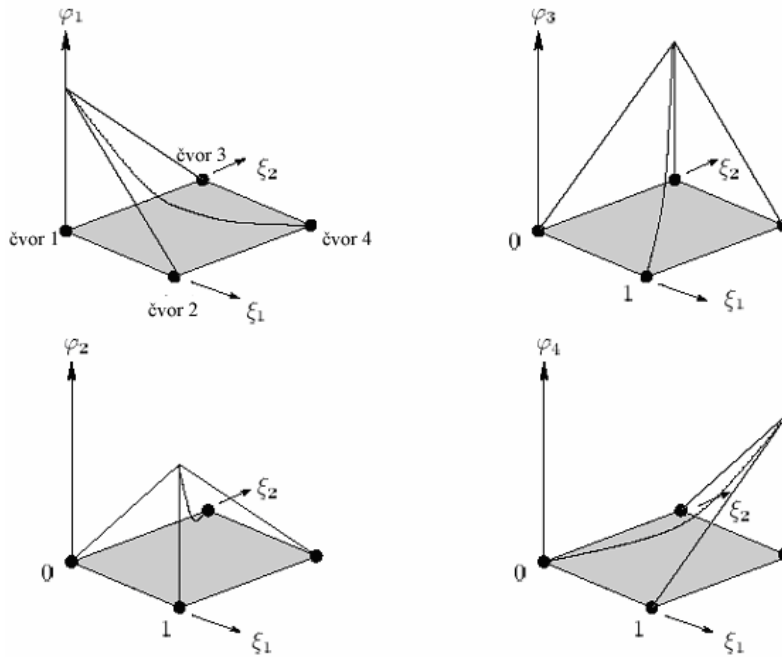
$$\varphi_2(\xi_1, \xi_2) = \xi_1(1 - \xi_2)$$

$$\varphi_3(\xi_1, \xi_2) = (1 - \xi_1)\xi_2$$

$$\varphi_4(\xi_1, \xi_2) = \xi_1\xi_2$$

Treba uočiti da je $\varphi_1(\xi_1, \xi_2) = \varphi_1(\xi_1)\varphi_1(\xi_2)$, gdje su $\varphi_1(\xi_1)$ i $\varphi_1(\xi_2)$ jednodimenzionalne bazne funkcije. Slično, $\varphi_2(\xi_1, \xi_2) = \varphi_2(\xi_1)\varphi_1(\xi_2) \dots$ itd.

Ove četiri bilinearne bazne funkcije su prikazane na slici 1.9.



Slika 1.9: Dvodimenzionalne bilinearne bazne funkcije.

Primjećujemo da $\varphi_n(\xi_1, \xi_2)$ iznosi 1 pri čvoru n a nula pri druga tri čvora. To osigurava da temperatura $u(\xi_1, \xi_2)$ poprima doprinos od svakog čvornog parametra u_n težinski s $\varphi_n(\xi_1, \xi_2)$. Kada je $u(\xi_1, \xi_2)$ određen pri čvoru n , on poprima vrijednost u_n .

Kao i prije, geometrija elementa je definirana obzirom na pozicije čvorova (x_n, y_n) , $n = 1 \dots 4$ sa

$$x = \sum_n \varphi_n(\xi_1, \xi_2) x_n$$

$$y = \sum_n \varphi_n(\xi_1, \xi_2) y_n$$

što nam daje vezu između matematičkog prostora $0 \leq \xi_1, \xi_2 \leq 1$ i fizikalnog prostora $x_1 \leq x \leq x_2$; $y_1 \leq y \leq y_2$.

Dvodimenzionalne bazne funkcije višeg stupnja se može slično konstruirati od prikladnih jednodimenzionalnih baznih funkcija. Npr., 6-čvorni kvadratno-linearni element (kvadratna na ξ_1 a linearna na ξ_2 koordinati) (slika 1.10) će imati:

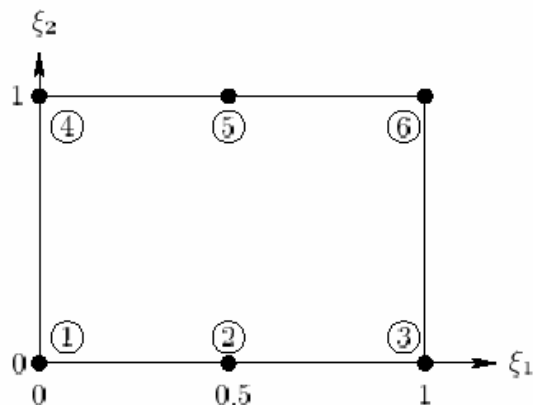
$$u = \sum_{n=1}^6 \varphi_n(\xi_1, \xi_2) u_n$$

gdje je

$$\varphi_1(\xi_1, \xi_2) = 2(\xi_1 - 1)(\xi_1 - 0.5)(1 - \xi_2) \quad \varphi_2(\xi_1, \xi_2) = 4\xi_1(1 - \xi_1)(1 - \xi_2) \quad (1.7)$$

$$\varphi_3(\xi_1, \xi_2) = 2\xi_1(\xi_1 - 0.5)(1 - \xi_2) \quad \varphi_4(\xi_1, \xi_2) = 2(\xi_1 - 1)(\xi_1 - 0.5)\xi_2 \quad (1.8)$$

$$\varphi_5(\xi_1, \xi_2) = 4\xi_1(1 - \xi_1)\xi_2 \quad \varphi_6(\xi_1, \xi_2) = 2\xi_1(\xi_1 - 0.5)\xi_2 \quad (1.8)$$



Slika 1.10: Kvadratno-linearni element s 6 čvorova (broj čvorova je zaokružen).

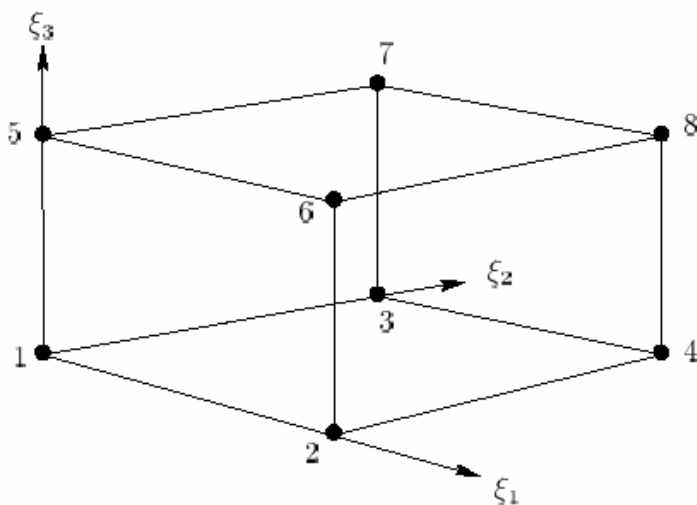
Trodimenzionalne bazne funkcije su slično formirane, npr., trilinearni element ima 8 čvorova (slika 1.11) s ovim baznim funkcijama:

$$\varphi_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (1 - \xi_1)(1 - \xi_2)(1 - \xi_3) \quad \varphi_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \xi_1(1 - \xi_2)(1 - \xi_3) \quad (1.10)$$

$$\varphi_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (1 - \xi_1)\xi_2(1 - \xi_3) \quad \varphi_4(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \xi_1\xi_2(1 - \xi_3) \quad (1.11)$$

$$\varphi_5(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (1 - \xi_1)(1 - \xi_2)\xi_3 \quad \varphi_6(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \xi_1(1 - \xi_2)\xi_3 \quad (1.12)$$

$$\varphi_7(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (1 - \xi_1)\xi_2\xi_3 \quad \varphi_8(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \xi_1\xi_2\xi_3 \quad (1.13)$$



Slika 1.11: Trilinearni element s 8 čvorova.

Neprekinutost višeg reda

Do sada razmatrane Langrangeove bazne funkcije ostvaruju neprekinutost prvog reda funkcije u na spojištima elemenata. Ponekad je poželjno koristiti bazne funkcije koje osiguravaju neprekinutost derivacija funkcije u po ξ . Prikladan način da se to postigne jest uvođenje dodatna dva čvorna parametra $\left(\frac{du}{d\xi}\right)_n$. Bazne funkcije su birane tako da osiguraju:

$$\left.\frac{du}{d\xi}\right|_{\xi=0} = \left(\frac{du}{d\xi}\right)_1 = u'_1 \quad i \quad \left.\frac{du}{d\xi}\right|_{\xi=1} = \left(\frac{du}{d\xi}\right)_2 = u'_2$$

a kako je u_n zajednički susjednim elementima, neprekinutost prve derivacije je osigurana. Sada imamo 4 čvorna parametara po elementu i stoga su bazne funkcije kubne po ξ . Izvedimo te kubne *Hermitove* bazne funkcije:

$$u(\xi) = a + b\xi + c\xi^2 + d\xi^3$$

$$\frac{du}{d\xi} = b + 2c\xi + 3d\xi^2$$

i nametnimo ograničenja

$$u(0) = a = u_1$$

$$u(1) = a + b + c + d = u_2$$

$$\left.\frac{du}{d\xi}\right|(0) = b = u'_1$$

$$\left.\frac{du}{d\xi}\right|(1) = b + 2c + 3d = u'_2$$

Rješenjem ove četiri jednačbe sa četiri nepoznanice a, b, c i d

$$a = u_1$$

$$b = u'_1$$

$$c = 3u_2 - 3u_1 - 2u'_1 - u'_2$$

$$d = u'_1 + u'_2 + 2u_1 - 2u_2$$

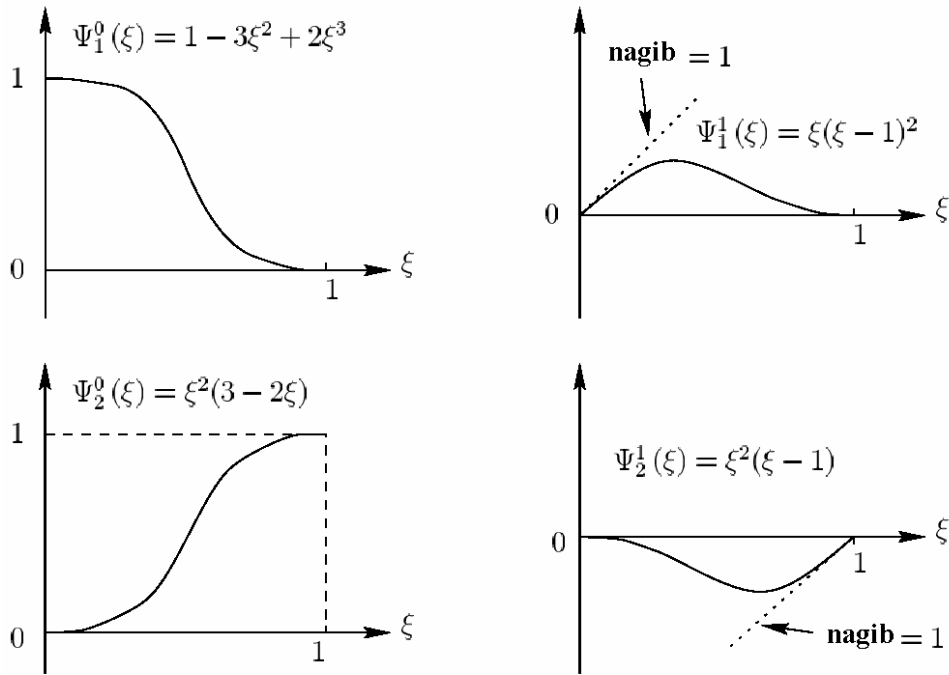
Uvrštenjem a, b, c i d natrag u glavnu izvornu kubnu jednačbu

$$u(\xi) = u_1 + u'_1 \xi + (3u_2 - 3u_1 - 2u'_1 - u'_2)\xi^2 + (u'_1 + u'_2 + 2u_1 - 2u_2)\xi^3$$

ili, sređivanjem,

$$u(\xi) = \Psi_1^0(\xi)u_1 + \Psi_1^1(\xi)u'_1 + \Psi_2^0(\xi)u_2 + \Psi_2^1(\xi)u'_2 \quad (1.14)$$

gdje su Hermitove bazne funkcije prikazane na slici 1.12.



Slika 1.12: Kubne Hermitove bazne funkcije.

Kod praktične primjene kubnih Hermitovih funkcija koristi se derivacija u globalnom čvoru $\left(\frac{du}{ds}\right)_n$, gdje je s duljina luka. Tada je

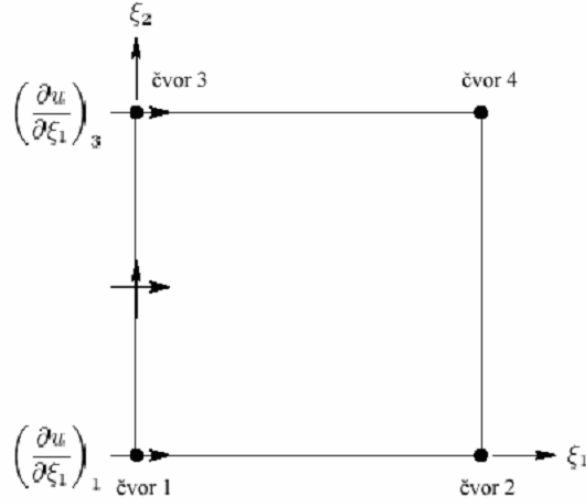
$$\left(\frac{du}{d\xi}\right)_n = \left(\frac{du}{ds}\right)_{\Delta(n,e)} \left(\frac{ds}{d\xi}\right)_n \quad (1.15)$$

gdje je $\left(\frac{ds}{d\xi}\right)_n$ faktor pretvorbe koji pretvara derivaciju po duljini luka globalnog čvora Δ u ξ -koordinatnu derivaciju lokalnog čvora n . Tako je $\frac{du}{ds}$ primoran biti neprekinuti na spojištima elemenata radije nego $\frac{du}{d\xi}$. Dvodimenzijaska bikubna Hermitova bazna funkcija zahtijeva ove derivacije po čvoru:

$$u, \frac{\partial u}{\partial \xi_1}, \frac{\partial u}{\partial \xi_2}, \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}$$

Slijedi objašnjenje za derivaciju drugog reda. Ako je u kubna duž ξ_1 i kubna po ξ_2 , tada je $\frac{\partial u}{\partial \xi_1}$ kvadratna po ξ_1 a kubna po ξ_2 , a $\frac{\partial u}{\partial \xi_2}$ je kubna po ξ_1 a kvadratna po ξ_2 . Sada razmotrimo stranu 1-3 na slici 1.13. Kubna ovisnost u duž ξ_2 je specificirana sa četiri čvorna parametara $u_1, \left(\frac{\partial u}{\partial \xi_2}\right)_1, u_3, \left(\frac{\partial u}{\partial \xi_2}\right)_3$. Kako je $\frac{\partial u}{\partial \xi_1}$ također kubna po ξ_2 i potpuno neovisna o ova četiri

parametra, zahtijevamo četiri dodatna parametra za njenu specifikaciju. Dva su već specificirana sa $\left(\frac{\partial u}{\partial \xi_1}\right)_1$ i $\left(\frac{\partial u}{\partial \xi_1}\right)_3$, a ostala dva su $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}\right)_1$ i $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}\right)_3$.



Slika 1.13: Interpolacija $\frac{\partial u}{\partial \xi_1}$ duž stranice 1-3.

Bikubna interpolacija sa navedenim čvornim parametrima glasi

$$\begin{aligned}
u(\xi_1, \xi_2) = & \Psi_1^0(\xi_1)\Psi_1^0(\xi_2)u_1 + \Psi_2^0(\xi_1)\Psi_1^0(\xi_2)u_2 + \\
& + \Psi_1^0(\xi_1)\Psi_2^0(\xi_2)u_3 + \Psi_2^0(\xi_1)\Psi_2^0(\xi_2)u_4 + \\
& + \Psi_1^1(\xi_1)\Psi_1^0(\xi_2)\left(\frac{\partial u}{\partial \xi_1}\right)_1 + \Psi_2^1(\xi_1)\Psi_1^0(\xi_2)\left(\frac{\partial u}{\partial \xi_1}\right)_2 + \\
& + \Psi_1^1(\xi_1)\Psi_2^0(\xi_2)\left(\frac{\partial u}{\partial \xi_1}\right)_3 + \Psi_2^1(\xi_1)\Psi_2^0(\xi_2)\left(\frac{\partial u}{\partial \xi_1}\right)_4 + \\
& + \Psi_1^0(\xi_1)\Psi_1^1(\xi_2)\left(\frac{\partial u}{\partial \xi_2}\right)_1 + \Psi_2^0(\xi_1)\Psi_2^1(\xi_2)\left(\frac{\partial u}{\partial \xi_2}\right)_4 + \\
& + \Psi_1^1(\xi_1)\Psi_1^1(\xi_2)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}\right)_1 + \Psi_2^1(\xi_1)\Psi_1^1(\xi_2)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}\right)_2 + \\
& + \Psi_1^1(\xi_1)\Psi_2^1(\xi_2)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}\right)_3 + \Psi_2^1(\xi_1)\Psi_2^1(\xi_2)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1 \partial \xi_2}\right)_4
\end{aligned} \tag{1.16}$$

gdje su

$$\begin{aligned}
\Psi_1^0(\xi) &= 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \\
\Psi_1^1(\xi) &= \xi(\xi - 1)^2 \\
\Psi_2^0(\xi) &= \xi^2(3 - 2\xi) \\
\Psi_2^1(\xi) &= \xi^2(\xi - 1)
\end{aligned} \tag{1.17}$$

jednodimenzionalne kubne Hermitove bazne funkcije (slika 1.12).

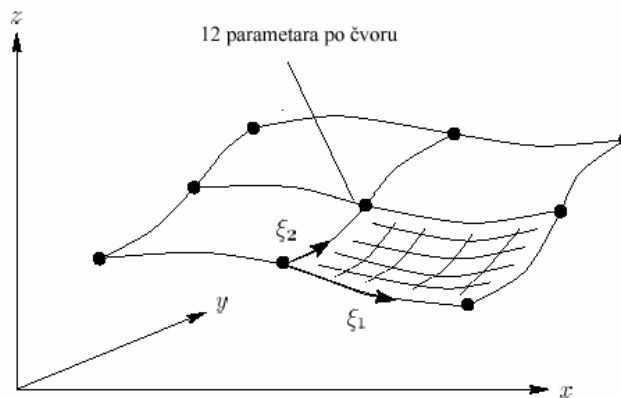
Slično 1D slučaju, da bi zadržali neprekinute derivacije po fizikalnoj x -koordinati kao i po ξ -koordinati, derivacije globalnog čvora moraju biti po fizikalnoj duljini luka. To su dvije duljine luka: s_1 , duž ξ_1 -koordinate i s_2 , duž ξ_2 -koordinate. Tako

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi_1} \right)_n &= \left(\frac{\partial u}{\partial s_1} \right)_{\Delta(n,e)} \left(\frac{\partial s_1}{\partial \xi_1} \right)_n \\ \left(\frac{\partial u}{\partial \xi_2} \right)_n &= \left(\frac{\partial u}{\partial s_2} \right)_{\Delta(n,e)} \left(\frac{\partial s_2}{\partial \xi_2} \right)_n \\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \right)_n &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial s_1 \partial s_2} \right)_{\Delta(n,e)} \left(\frac{\partial s_1}{\partial \xi_1} \right)_n \left(\frac{\partial s_2}{\partial \xi_2} \right)_n \end{aligned} \quad (1.15)$$

gdje je $\left(\frac{\partial s_1}{\partial \xi_1} \right)_n$ i $\left(\frac{\partial s_2}{\partial \xi_2} \right)_n$ faktor pretvorbe koji pretvara derivaciju po duljini luka globalnog čvora Δ u ξ -koordinatnu derivaciju lokalnog čvora n .

Bikubna Hermitova bazna funkcija je moćni alat za opis zakrivljenih površina. Slika 1.14 prikazuje četvero-elementnu bikubnu Hermitovu površinu u 3D prostoru, gdje svaki čvor ima sljedećih 12 parametara:

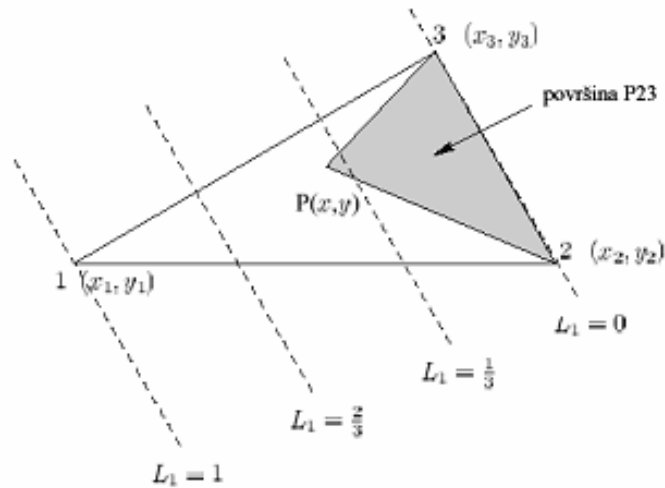
$$x, \frac{\partial x}{\partial s_1}, \frac{\partial x}{\partial s_2}, \frac{\partial^2 x}{\partial s_1 \partial s_2}, y, \frac{\partial y}{\partial s_1}, \frac{\partial y}{\partial s_2}, \frac{\partial^2 y}{\partial s_1 \partial s_2}, z, \frac{\partial z}{\partial s_1}, \frac{\partial z}{\partial s_2}, \frac{\partial^2 z}{\partial s_1 \partial s_2}.$$



Slika 1.14: Površina formirana sa četiri bikubna Hermitova elementa.

Trokutni konačni element

Logičkim proširenjem 1D konačnog elementa za još jednu dimenziju dobije se trokutni element, kao najjednostavniji dvodimenzionalni element. Trokutni elementi ne mogu koristiti ranije definirane ξ_1 i ξ_2 koordinate za *tenzorski produkt* elemenata (tj., 2D i 3D elementi čije su bazne funkcije formirane kao produkt 1D bazne funkcije). Prirodne koordinate trokuta su bazirane na odnosima površine, a zovu se *površinske koordinate*. Uzmimo površinu formiranu točkama 2, 3 i $P(x,y)$ na slici 1.15 i stavimo je u omjer s ukupnom površinom trokuta:



Slika 1.15: Poovršinske koordinate za trokutasti element:

$$L_1 = \frac{\text{Površina}(P23)}{\text{Površina}(123)} = \frac{\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{a_1 + b_1 x + c_1 y}{2\Delta}$$

gdje je $\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$ površina trokuta s vrhovima 123, a $a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2$, $b_1 = y_2 - y_3$,

$c_1 = x_3 - x_2$. Vidimo da je L_1 linearna funkcija x i y . Slično, površinske koordinate za druga dva trokuta, koji sadrže $P(x, y)$ i dva vrha su:

$$L_2 = \frac{\text{Površina}(P13)}{\text{Površina}(123)} = \frac{\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_3 & y_3 \\ 1 & x_1 & y_1 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{a_2 + b_2 x + c_2 y}{2\Delta}$$

$$L_3 = \frac{\text{Površina}(P12)}{\text{Površina}(123)} = \frac{\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{a_3 + b_3 x + c_3 y}{2\Delta}$$

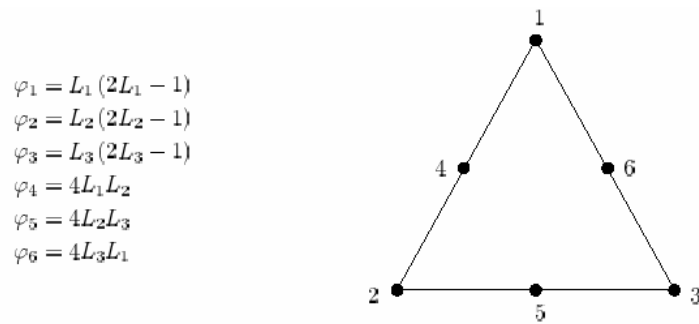
gdje je $a_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3$, $b_2 = y_3 - y_1$, $c_2 = x_1 - x_3$, $a_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1$, $b_3 = y_1 - y_2$, $c_3 = x_2 - x_1$. Uočimo da je $L_1 + L_2 + L_3 = 1$.

Površinska koordinata L_1 se mijenja linearno od $L_1 = 0$, kada P leži na čvoru 2 ili 3, do $L_1 = 1$, kada P leži na čvoru 1. Dakle, L_1 se može direktno koristiti kao bazna funkcija za čvor 1. Interpolacija preko cijelog trokuta je

$$u(x, y) = \varphi_1(x, y)u_1 + \varphi_2(x, y)u_2 + \varphi_3(x, y)u_3$$

gdje je $\varphi_1 = L_1$, $\varphi_2 = L_2$ i $\varphi_3 = 1 - L_1 - L_2$.

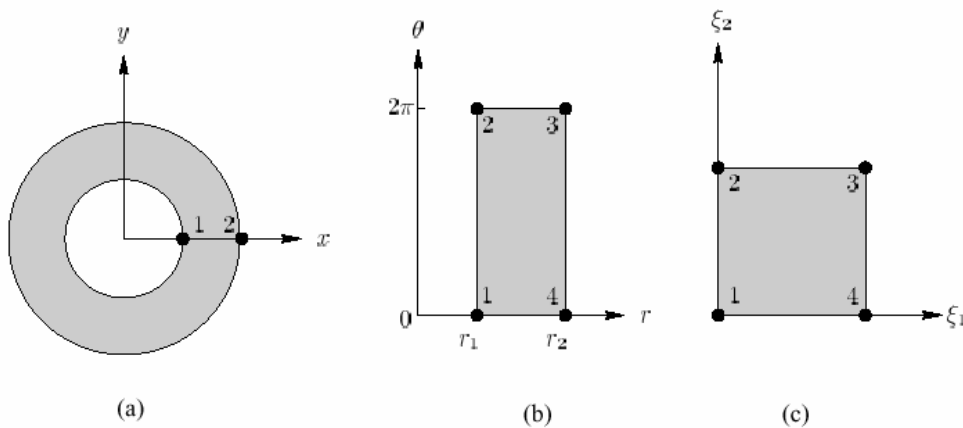
Trokutni element sa kvadratnim baznim funkcijama i šest čvorova prikazan je na slici 1.16.



Slika 1.16: Kvadratne bazne funkcije za 6 čvorni element.

Krivocrtni koordinatni sustav

Ponekad je pogodno koristiti krivocrti koordinatni sustav za tvorbu domene konačnih elemenata iznad koje će se tražiti rješenje. Npr., kružni vijenac, sa dva globalna čvora $r = r_1$ i $r = r_2$, se može prikazati elementom u cilindričnim (r, Θ) -koordinatama (slika 1.17).



Slika 1.17: Definiranje kružnog vijenca sa elementom u cilindričnim koordinatama.

Na slici vidimo da se vrhovi (lokalni čvorovi) 1 i 2 elementa u (r, Θ) - ili (ξ_1, ξ_2) -koordinatama preslikavaju na globalni čvor 1 u (x, y) -koordinatama. Slično, vrhovi 3 i 4 elementa se preslikavaju na globalni čvor 2. Vrijednosti (r, Θ) -koordinata za bilo koju (ξ_1, ξ_2) točku su date bilinearnom interpolacijom čvorova r_n i Θ_n kao

$$r = \varphi_n(\xi_1, \xi_2)r_n$$

$$\Theta = \varphi_n(\xi_1, \xi_2)\Theta_n$$

gdje su $\varphi_n(\xi_1, \xi_2)$ date sa (1.6).

III USTALJENO VOĐENJE TOPLINE

Jednodimenzionalno stacionarno vođenje topline

Iz jednostavne bilance topline infinitezimalnog dijela materijala dobivamo:

Promjena toplinskog fluksa = generacija topline

$$\frac{d}{dx}(\text{toplinski fluks}) + \text{gubitak topline} = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(-k \frac{du}{dx}\right) + q(u, x) = 0$$

gdje je u temperatura, x duljina štapa, $q(u, x)$ gubitak topline i k toplinska vodljivost ($\text{W}/(\text{m}^\circ\text{C})$).

Razmotrimo slučaj $q = u$

$$-\frac{d}{dx}\left(k \frac{du}{dx}\right) + u = 0 \quad 0 < x < 1 \quad (2.1)$$

s graničnim uvjetima: $u(0) = 0$ i $u(1) = 1$. Ova jednadžba (uz $k = 1$) ima egzaktno rješenje

$$u(x) = \frac{e}{e^2 - 1}(e^x - e^{-x}) \quad (2.2)$$

s kojim možemo uspoređivati aproksimativno rješenje konačnim elementima.

Da bi riješili jednadžbu (2.1) metodom konačnih elemenata potrebni su ovi koraci:

1. Pisanje jednadžbe u integralnom obliku.
2. Parcijalna integracija (1D) ili korištenje Greenovog teorema (2D i 3D) za snižavanje reda derivacije.
3. Aproksimacija temperaturnog polja konačnim elementima.
4. Integracije na elementima za izračunavanje elementna matrice toplinske vodljivosti i vektora toplinskog toka.
5. Slaganje globalne jednadžbe.
6. Primjena graničnih uvjeta.
7. Rješenje globalne jednadžbe.
8. Izračunavanje toplinskih tokova.

1. Integralna jednadžba

Umjesto direktnog rješavanja (2.1), formira se težinski ostatak

$$\int R \omega dx = 0 \quad (2.3)$$

gdje je R ostatak

$$R = -\frac{d}{dx}\left(k\frac{du}{dx}\right) + u \quad (2.4)$$

za aproksimativno rješenje u i težinsku test funkciju ω (izabrana kasnije). Ako je u egzaktno rješenje na cijeloj domeni, ostatak R je svugdje nula. Ali u stvarnosti pokušavamo obuhvatiti rješenje u za koje će ostatak (pogreška, tj., iznos za koji diferencijalna jednačba ne zadovoljava egzaktno u datoj točki) biti jednoliko distribuiran po domeni. Uvrštenjem (2.4) u (2.3) imamo

$$\int_0^1 \left\{ -\frac{d}{dx}\left(k\frac{du}{dx}\right)\omega + u\omega \right\} dx = 0 \quad (2.5)$$

Ova jednačba tjera ostatak (pogrešku) prema nuli u prostorno srednjem smislu. Točnije, ω je birana tako da je ostatak držan okomit na funkcije korištene za aproksimaciju u (vidi niže korak 3).

2. Parcijalna integracija

Velika prednost integralne jednačbe je mogućnost smanjenja reda derivacije parcijalnom integracijom. Supstitucijom $u = \omega$ i $v = -k\frac{du}{dx}$ u formulu za parcijalnu integraciju

$$\int u \frac{dv}{dx} dx = uv - \int v \frac{du}{dx} dx$$

daje

$$\int_0^1 \omega \frac{d}{dx}\left(-k\frac{du}{dx}\right) dx = \left[\omega\left(-k\frac{du}{dx}\right) \right]_0^1 - \int_0^1 \left(-k\frac{du}{dx}\right) \frac{d\omega}{dx} dx$$

pa uvrštenjem u (2.5) imamo

$$\int_0^1 \left(\left(k\frac{du}{dx}\frac{d\omega}{dx} \right) + u\omega \right) dx = \left[k\frac{du}{dx}\omega \right]_0^1 \quad (2.6)$$

3. Aproksimacija konačnim elementima

Podjelimo domenu $0 < x < 1$ na tri jednaka elementa i zamjenimo kontinuiranu veličinu $u(x)$ na svakom pojedinom elementu parametarski zadanom aproksimacijom konačnih elemenata

$$u(\xi) = \varphi_1(\xi)u_1 + \varphi_2(\xi)u_2 = \sum_n \varphi_n(\xi)u_n$$

$$x(\xi) = \varphi_1(\xi)x_1 + \varphi_2(\xi)x_2 = \sum_n \varphi_n(\xi)x_n$$

(sumacija po ponovljenim indeksima) gdje su $\varphi_1(\xi)=1-\xi$ su $\varphi_2(\xi)=\xi$ linearne bazne funkcije. Za test funkciju biramo $\omega = \varphi_m$ (Galjerkinova pretpostavka). To prisiljava da ostatak R bude okomit na bazne funkcije. Time je osigurano da ostatak (pogreška) monotono opada porastom broja elemenata (vidi poslije dokaz ovog vrlo važnog koraka).

Integral u (2.6) podijelimo na integrale po elementima

$$\int_0^1 \dots dx = \int_0^{\frac{1}{3}} \dots dx + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \dots dx + \int_{\frac{2}{3}}^1 \dots dx$$

i svaki prebacimo u ξ -koordinatu

$$\int_{x_1}^{x_2} \dots dx = \int_0^1 \dots J d\xi$$

gdje je $J = \left| \frac{dx}{d\xi} \right|$ Jacobijeva determinanta za transformaciju iz x -koordinata u ξ -koordinate.

4. Integracije na elementima

Integracije na elementima dobivamo iz lijeve strane jednadžbe (2.6)

$$\int_0^1 \left(k \frac{du}{dx} \frac{d\omega}{dx} + u \omega \right) J d\xi \quad (2.7)$$

gdje je $u = \sum_n \varphi_n u_n$ i $\omega = \varphi_m$. Kako su φ_n i φ_m funkcije od ξ , njihove derivacije po x treba pretvoriti u derivacije po ξ

$$\sum_n u_n \int_0^1 \left(k \frac{d\varphi_m}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \frac{d\varphi_n}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} + \varphi_n \varphi_m \right) J d\xi \quad (2.8)$$

gdje je u_n stavljen ispred integrala, jer nije funkcija od ξ . Iz odnosa, $x:\xi = 1:3$, Jacobian je $J = \frac{dx}{d\xi} = \frac{1}{3}$. Izraz koji množi čvorni parametar u_n , se zove elementna matrica toplinske vodljivosti, E_{mn}

$$E_{mn} = \int_0^1 \left(k \frac{d\varphi_m}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} \frac{d\varphi_n}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} + \varphi_n \varphi_m \right) J d\xi = \int_0^1 \left(k \frac{d\varphi_m}{d\xi} \frac{1}{3} \frac{d\varphi_n}{d\xi} \frac{1}{3} + \varphi_n \varphi_m \right) J d\xi$$

gdje su indeksi, m i n 1 ili 2. Da izračunamo E_{mn} , uvrstimo bazne funkcije

$$\begin{aligned} \varphi_1(\xi) = 1 - \xi & \quad \text{ili} \quad \frac{d\varphi_1}{d\xi} = -1 \\ \varphi_2(\xi) = \xi & \quad \text{ili} \quad \frac{d\varphi_2}{d\xi} = 1 \end{aligned}$$

Tako,

$$E_{11} = \frac{1}{3} \int_0^1 \left(9k \left(\frac{d\varphi_1}{d\xi} \right)^2 + \varphi_1^2 \right) d\xi = \frac{1}{3} \int_0^1 (9k(-1)^2 + (1-\xi)^2) d\xi = \frac{1}{3} \left(9k + \frac{1}{3} \right)$$

i, slično;

$$E_{12} = E_{21} = \frac{1}{3} \left(-9k + \frac{1}{6} \right)$$

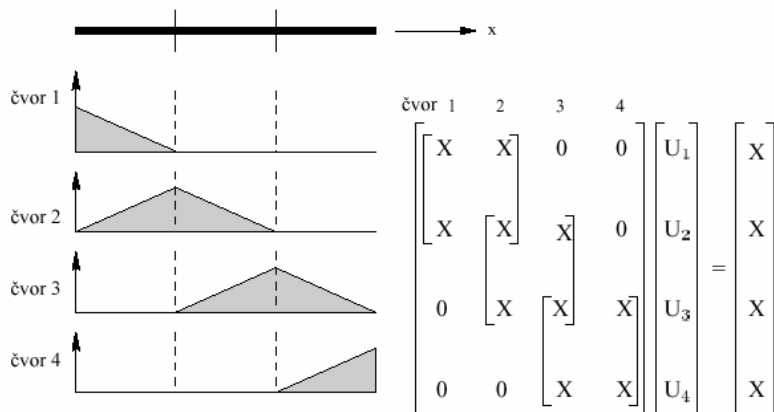
$$E_{22} = \frac{1}{3} \left(9k + \frac{1}{3} \right)$$

$$E_{mn} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \left(9k + \frac{1}{3} \right) & \frac{1}{3} \left(-9k + \frac{1}{6} \right) \\ \frac{1}{3} \left(-9k + \frac{1}{6} \right) & \frac{1}{3} \left(9k + \frac{1}{3} \right) \end{bmatrix}$$

Vidimo da je elementna matrica toplinske vodljivosti simetrična. Također primjećujemo da je matrica toplinske vodljivosti, u ovom slučaju, ista za sve elemente. Zbog pojednostavljenja stavimo da je $k = 1$.

5. Slaganje globalne jednadžbe

Tri elementne matrice topl. vodljivosti (s $k = 1$) su složene u jednu globalnu matricu topl. vodljivosti. To je ilustrirano na slici 2.1, gdje je redak matrice 1,...,4 formiran od globalne težišne funkcije pridružene čvoru 1,...,4.



Slika 2.1: Redovi globalne matrice je formiran od globalnih težišnih funkcija.

Vidimo se kako svaka elementna matrica (2x2 na slici 2.1) preklapa sa svojom susjednom, jer sadrže zajednički susjedni globalni čvor. Slaganjem dobivamo

$$\begin{bmatrix} \frac{28}{9} & -\frac{53}{18} & 0 & 0 \\ -\frac{53}{18} & \frac{28}{9} + \frac{28}{9} & -\frac{53}{18} & 0 \\ 0 & -\frac{53}{18} & \frac{28}{9} + \frac{28}{9} & -\frac{53}{18} \\ 0 & 0 & -\frac{53}{18} & \frac{28}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \text{Vektor toplinskog toka}$$

Prvi red matrice (koji generira toplinski tok na čvoru 1) ima nule koje množe U_3 i U_4 jer čvorovi 3 i 4 nemaju direktnu vezu sa baznim funkcijama čvora 1. Dakle, globalna matrica je rijetka matrica, jer su bazne funkcije lokalizirane na elementima.

Desna strana jednadžbe (2.6) je

$$\left[k \frac{du}{dx} \omega \right]_{x=0}^{x=1} = \left(k \frac{du}{dx} \omega \right) \Big|_{x=1} - \left(k \frac{du}{dx} \omega \right) \Big|_{x=0} \quad (2.9)$$

Da izračunamo ove izraze promotrimo težinske funkcije ω koje odgovaraju pojedinom globalnom čvoru (pogledaj sliku 1.6). Za čvor 1 ω_1 je oblikovana od bazne funkcije φ_1 koja je pridodjeljene prvom čvoru elementa 1, i stoga $\omega_1|_{x=0} = 1$. Također, kako je ω_1 identična nuli izvan elementa 1 $\omega_1|_{x=1} = 0$. Time se (2.9) za čvor 1 reducira na

$$\left[k \frac{du}{dx} \omega_1 \right]_{x=0}^{x=1} = - \left(k \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x=0} = \text{ulaz toplinskog toka za čvor 1.}$$

Slično, za čvor 2 i 3 imamo

$$\left[k \frac{du}{dx} \omega_n \right]_{x=0}^{x=1} = 0 \quad (\text{čvor 2 i 3})$$

i

$$\left[k \frac{du}{dx} \omega_4 \right]_{x=0}^{x=1} = \left(k \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x=1} = \text{ulaz toplinskog toka za čvor 4.}$$

Da se naglasi da su to toplinski tokovi ostavljen je opći k . Sastavljanjem tih globalnih jednadžbi dobiva se

$$\begin{bmatrix} \frac{28}{9} & -\frac{53}{18} & 0 & 0 \\ -\frac{53}{18} & \frac{28}{9} + \frac{28}{9} & -\frac{53}{18} & 0 \\ 0 & -\frac{53}{18} & \frac{28}{9} + \frac{28}{9} & -\frac{53}{18} \\ 0 & 0 & -\frac{53}{18} & \frac{28}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - \left(k \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x=0} \\ 0 \\ 0 \\ \left(k \frac{du}{dx} \right) \Big|_{x=1} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

ili

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f}$$

gdje je \mathbf{K} globalna matrica toplinske vodljivosti, \mathbf{u} vektor nepoznanica i \mathbf{f} globalni vektor toplinskog toka.

Da smo u diferencijalnoj jednadžbi imali izraz za distribuirani izvor topline koji je neovisan o temperaturi u , on bi se u težinskom integralu pojavio na desnoj strani jednadžbe (2.10). Nadalje, ako je izvor topline funkcija od x , doprinos svakog elementa je različit.

6. Granični uvjeti

Granični uvjeti $u(0) = 0$ i $u(1) = 1$ su primijenjeni direktno na prvi i zadnji čvor, tj. $U_1 = 0$ i $U_4 = 1$. Ovi tzv. nužni granični uvjeti zamjenjuju prvi i zadnji red u globalnoj jednadžbi (2.10), gdje su toplinski tokovi na desnoj strani jednadžbe nepoznati.

$$\begin{aligned}U_1 &= 0 \\ -\frac{53}{18}U_1 + \frac{56}{9}U_2 - \frac{53}{18}U_3 &= 0 \\ -\frac{53}{18}U_2 + \frac{56}{9}U_3 - \frac{53}{18}U_4 &= 0 \\ U_4 &= 1\end{aligned}$$

Da su primijenjeni granični uvjeti toplinskih tokova (*Neumanovi* uvjeti) umjesto nužnih graničnih uvjeta (*Dirichletovi* uvjeti), poznate vrijednosti tokova bi uvrstili u desnu stranu jednadžbe (2.10) a vrijednost U na čvoru bi ostao nepoznat u sustavu jednadžbi.

Kod toplinski izoliranih granica tok bi bio nula (*prirodni* granični uvjeti). Barem jedan nužni granični uvjet mora biti primjenjen.

7. Rješenje

Rješenje sustava jednadžbi je: $U_2 = 0.2885$ i $U_3 = 0.6098$. Iz (2.2) egzaktno rješenje za te točke je 0.2882 i 0.6102. Rješenje konačnim elementima je prikazano na slici 2.2.

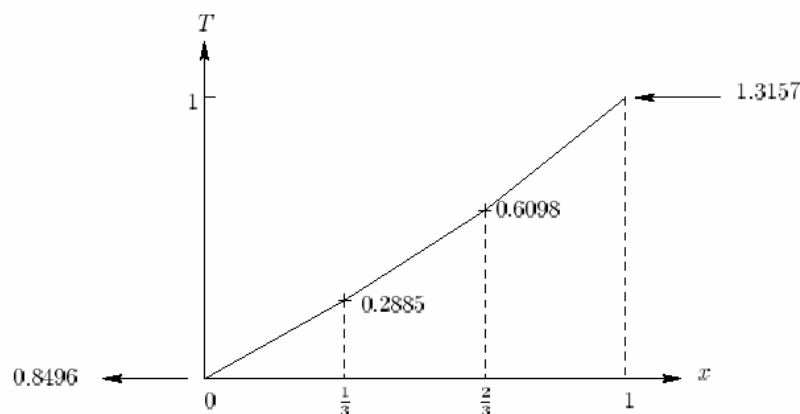
8. Toplinski tokovi

Toplinski tokovi za čvor 1 i 4 su izračunati uvrštenjem čvornih rješenja $U_1 = 0$, $U_2 = 0.2885$, $U_3 = 0.6098$ i $U_4 = 1$ u (2.10)

$$\text{ulaz toplinskog toka za čvor 1} = -\left(k \frac{du}{dx}\right)\Big|_{x=0} = -0.8496 \quad (k = 1; \text{egzaktno rješenje } 0.8509)$$

$$\text{ulaz toplinskog toka za čvor 4} = \left(k \frac{du}{dx}\right)\Big|_{x=1} = 1.3157 \quad (k = 1; \text{egzaktno rješenje } 1.3131)$$

Toplinski tokovi su prikazani na slici 2.2.

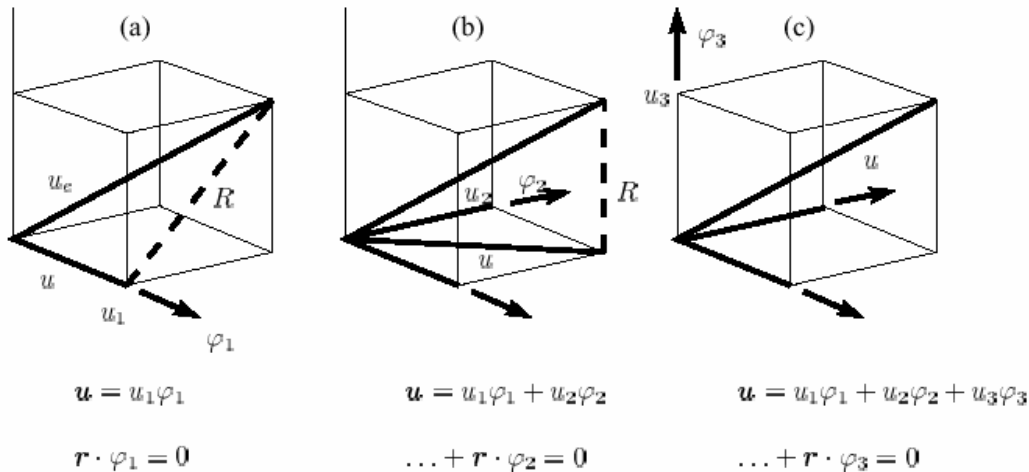


Slika 2.2: Rješenje 1D vođenja topline metodom konačnih elemenata.

Galjerkinova pretpostavka

Ključna ideja Galjerkinove metode konačnih elemenata je izbor težinskih (test) funkcija koje su okomite na jednadžbu ostatka. Ova ideja je ilustrirana na slici 2.3.

Na slici 2.3a egzaktni vektor u_e (leži u 3D prostoru) je aproksimiran s vektorom $u = u_1 \varphi_1$, gdje je φ_1 bazni vektor duž prve koordinatne osi (jedan stupanj slobode sustava). Razlika egzaktnog vektora u_e i približnog vektora u je ostatak ili pogreška $r = u_e - u$ (crtkana linija na slici 2.3a).



Slika 2.3: Osiguravanje okomitosti vektora ostatka r i baznih vektora φ_i Galjerkinovom metodom, povećanjem i od (a) 1, (b) 2 do (c) 3.

Galjerkinova metoda minimizira ovaj ostatak, čineći ga okomitim na φ_i a stoga i na približni vektor u . Ako je dodan drugi stupanj slobode (druga koordinatna os na slici 2.3b), približni vektor je $u = u_1 \varphi_1 + u_2 \varphi_2$, gdje je ostatak također okomit na φ_2 i stoga na u . S tri stupnja slobode (treća koordinatna os na slici 2.3c), približni vektor je $u = u_1 \varphi_1 + u_2 \varphi_2 + u_3 \varphi_3$ koji rezultira s pogreškom (koja je također okomita na φ_3 smanjenom na nulu $u = u_e$). Za 3D vektorski prostor potrebne su samo tri bazna vektora (tri osi) koji reprezentiraju egzaktni vektor u . Međutim, u beskonačno-dimenzijском vektorskom prostoru pridodjeljenom prostornom kontinuiranom polju $u(x)$, treba nametnuti ekvivalent uvjetu okomitosti ($\int R \varphi dx = 0$) za svaku baznu funkciju φ korištenu za aproksimaciju $u(x)$. Tom analogijom ostatak je postavljen okomito na dane bazne funkcije, čime je on minimiziran (u smislu najmanjih kvadrata) za dati broj stupnjeva slobode. Povećanjem broja stupnjeva slobode (ili porastom broja elemenata) pogreška monotono opada.

Integralno kvadratična aproksimacija funkcije

Pokazuje se da izbor iste bazne funkcije za približenje i težinske (test) funkcije odgovara integralnoj kvadratičnoj aproksimaciji. Naime, ako se usvoje kriteriji minimizacije odstupanja funkcije od njenog približenja u obliku najmanjih kvadrata odstupanja tj. ako se traži najmanja vrijednost integrala:

$$I = \int_{\Omega} r^2 d\Omega = \int_{\Omega} (u_e(x) - u_n \varphi_n)^2 d\Omega$$

tada iz uvjeta

$$\frac{\partial I}{\partial u_m} = 0$$

slijedi:

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} (u_e(x) - u_n \varphi_n) \varphi_m d\Omega = 0$$

što u potpunosti odgovara izboru test funkcija u obliku

$$\omega = \varphi_m .$$

što daje sustav jednažbi iz kojeg se odrede parametri u_n :

$$a_{mn} = \int_{\Omega} \varphi_n \varphi_m d\Omega \quad ; \quad b_m = \int_{\Omega} u_e(x) d\Omega$$

Dvo- i tro-dimenzionalno stacionarno vođenje topline

Proširenjem (2.1) na 2D i 3D prostor povećava se kompleksnost problema. Uzmimo 3D jednažbu stacionarnog vođenja topline bez izvora topline

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{du}{dx} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{du}{dy} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{du}{dz} \right) = 0$$

gdje su k_x , k_y , i k_z toplinske vodljivosti u smjeru x , y i z osi. Ako je materijal izotropan, $k_x = k_y = k_z = k$, pa gornju jednažbu pišemo

$$-\nabla (k \nabla u) = 0 \quad (2.11)$$

i, ako je k prostorno konstantan (u slučaju homogenog materijala) dolazimo do *Laplaceove* jednažbe $k \nabla^2 u = 0$. Razmatrat ćemo rješenje (2.11) iznad domene Ω s graničnim uvjetima na Γ (slika 2.4)



Slika 2.4: Domena Ω definirana granicom Γ .

Integralna jednadžba je

$$\int_{\Omega} -\nabla(k\nabla u)\omega d\Omega = 0 \quad (2.12)$$

Multi-dimenzionalni ekvivalent parcijalne integracije je Green-Gaussov teorem:

$$\int_{\Omega} (f\nabla\nabla g + \nabla f\nabla g) d\Omega = \int_{\Gamma} f \frac{\partial g}{\partial n} d\Gamma \quad (2.13)$$

Uzmimo da je $f = \omega, g = -ku$ (pretpostavimo da je k konstantan) i smanjimo red derivacije

$$\int_{\Omega} -\nabla(k\nabla u)\omega d\Omega = \int_{\Omega} k\nabla u\nabla\omega d\Omega - \int_{\Gamma} k \frac{\partial u}{\partial n} \omega d\Gamma \quad (2.14)$$

što možemo usporediti s parcijalnom integracijom

$$\int_x -\frac{d}{dx} \left(k \frac{du}{dx} \right) \omega dx = \int_x k \frac{du}{dx} \frac{d\omega}{dx} dx - \left[k \frac{du}{dx} \omega \right]_{x_1}^{x_2}$$

Koristeći (2.14) u (2.12) dobivamo dvodimenzijski ekvivalent (2.6) (bez izvora topline)

$$\int_{\Omega} k\nabla u\nabla\omega d\Omega = \int_{\Gamma} k \frac{\partial u}{\partial n} \omega d\Gamma \quad (2.15)$$

time da je na jednom djelu Γ_D dati u (Dirichletov uvjet) a $\frac{\partial u}{\partial n}$ (Neumannov uvjet) na drugom djelu Γ_N ($\Gamma_D + \Gamma_N = \Gamma$). Podintegralni izraz na desnoj strani (2.15) se računa ovako

$$\nabla u\nabla\omega = \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial \omega}{\partial x_k} = \frac{\partial u}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} \frac{\partial \omega}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} \quad (2.16)$$

gdje je $u = \varphi_n u_n$ i $\omega = \varphi_m$, kao i prije, a izrazi $\frac{\partial \xi_i}{\partial x_k}$ su nađeni iz inverzne matrice

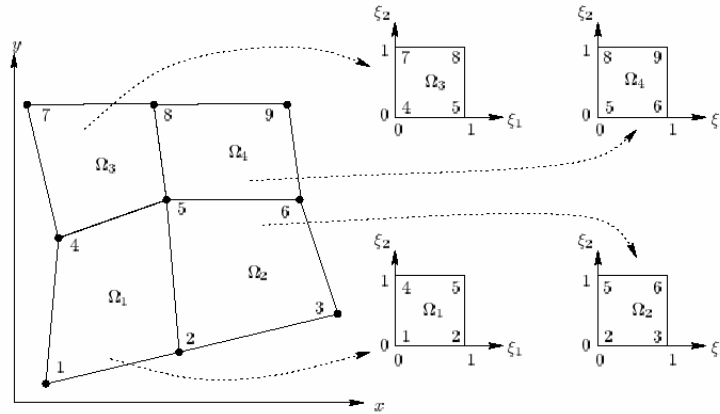
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_k}{\partial \xi_i} \end{bmatrix}^{-1}$$

ili, za dvodimenzioni element,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} & \frac{\partial \xi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x} & \frac{\partial \xi_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi_1} & \frac{\partial y}{\partial \xi_2} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial \xi_1} \frac{\partial y}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x}{\partial \xi_2} \frac{\partial y}{\partial \xi_1}} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \xi_2} & -\frac{\partial x}{\partial \xi_2} \\ -\frac{\partial y}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x}{\partial \xi_1} \end{bmatrix}$$

Bazne funkcije – diskretizacija elementima

Neka je $\Omega = \bigcup_{i=1}^T \Omega_i$, tj., domena rješenja je unija pojedinačnih elemenata. U svakom Ω_i neka je $u = \varphi_n u_n$. Prebacimo svaki Ω_i u ξ_1, ξ_2 -ravninu (slika 2.5).



Slika 2.5: Prebacivanje svakog Ω_i u ξ_1, ξ_2 -ravninu.

Za svaki element, bazne funkcije i njene derivacije su:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= (1 - \xi_1)(1 - \xi_2) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_1} &= -(1 - \xi_2) \\ & & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_2} &= -(1 - \xi_1) \\ \varphi_2 &= \xi_1(1 - \xi_2) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_1} &= 1 - \xi_2 \\ & & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi_2} &= -\xi_1 \\ \varphi_3 &= (1 - \xi_1)\xi_2 & \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi_1} &= -\xi_2 \\ & & \frac{\partial \varphi_3}{\partial \xi_2} &= 1 - \xi_1 \\ \varphi_4 &= \xi_1\xi_2 & \frac{\partial \varphi_4}{\partial \xi_2} &= \xi_1 \\ & & \frac{\partial \varphi_4}{\partial \xi_1} &= \xi_2 \end{aligned}$$

Integracija

Jednadžba je

$$\int_{\Omega} k \nabla u \nabla \omega \, d\Omega = \int_{\Gamma} k \frac{\partial u}{\partial n} \omega \, d\Gamma$$

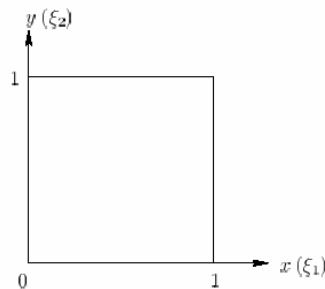
tj.

$$\int_{\Omega} k \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) d\Omega = \int_{\Gamma} k \frac{\partial u}{\partial n} \omega d\Gamma$$

gdje je u aproksimiran s $u = \varphi_n u_n$ a težinska funkcija prema Galjerkinu $\omega = \varphi_m$

$$\sum_i u_n \int_{\Omega} k \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial x} \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_n}{\partial y} \frac{\partial \varphi_m}{\partial y} \right) d\Omega = \int_{\Gamma} k \frac{\partial u}{\partial n} \varphi_m d\Gamma$$

Time je dobiven sustav jednažbi $E_{mn} u_n = F_m$. Kao primjer uzmimo tok topline u jediničnom kvadratu na slici 2.6.



Slika 2.6: Tok topline u jediničnom kvadratu.

Prva komponenta matrice E_{11} je izračunata ovako

$$E_{11} = k \int_0^1 \int_0^1 (1-y)^2 + (1-x)^2 dx dy = \frac{2}{3} k$$

i slično za ostale komponente matrice. Da element nije bio jedinični kvadrat morali bi transformirati x, y u ξ_1, ξ_2 -koordinate. Treba koristiti Jacobijevu determinantu i lančano

pravilo za izračunavanje $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}$. Npr. $\frac{\partial \varphi_n}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_n}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_n}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_n}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial x}$.

Sustav jednažbi $E_{mn} u_n = F_m$ izgleda

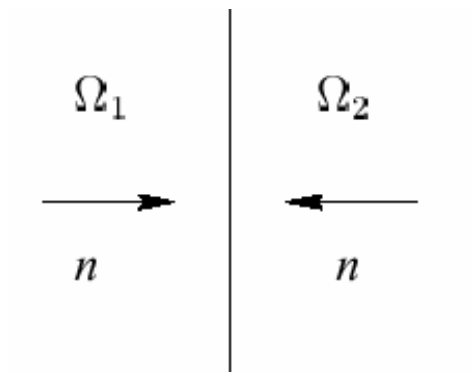
$$k \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \text{Vektor toplinskog toka}$$

Davanjem graničnih uvjeta rješava se sustav jednažbi po temperaturama nepoznatih čvorova ili tokova.

Slaganje globalne jednažbe

Svaka matrica elementa mora se složiti u globalnu matricu. Za primjer uzmimo četiri elementa (svaki jedinične veličine) i osam čvorova. Svaki element ima istu matricu elementa jer je istog oblika, veličine i interpolacije.

Toplinski tok je nula za čvor 2 i 8, jer su izolirani. Da saznamo što je sa čvorom 5 pogledajmo njegov izraz u vektoru opterećenja $\int_{\Gamma} k \frac{\partial u}{\partial n} \varphi_m d\Gamma = 0$. Tok je uvijek nula u unutarnjim čvorovima, jer se tokovi susjednih elemenata poništavaju (slika 2.8).



Slika 2.8: Poništavanje tokova unutarnjih čvorova.

IV NEUSTALJENO VOĐENJE TOPLINE

Metoda konačnih razlika

Eksplicitni oblik

Razmotrimo jednadžbu neustaljenog jednodimenzionalnog vođenja topline

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (0 < x < L, \quad t > 0) \quad (3.1)$$

gdje je k toplinska vodljivost a $u = u(x,t)$ temperatura, uz granične uvjete $U(0,t) = u_0$ i $u(L,t) = u_l$ i početne uvjete $u(x,0) = 0$. Definiranjem mreže s razmakom Δx u x -koordinati i Δt u vremenskoj koordinati aproksimiramo ovu jednadžbu konačnim razlikama (slika 3.1). Čvorovi mreže su označeni indeksima $i = 0, 1, \dots, I$ (za x smjer) i $n = 0, 1, \dots, N$ (za t smjer). Temperatura na čvoru (i,n) mreže je stoga označena

$$u(x,t) = u(i \Delta x, n \Delta t) = u_i^n \quad (3.2)$$

Razvijanjem u Tayloreve red u_{i+1}^n, u_{i-1}^n i u_i^{n+1} u točkama čvorova mreže (i,n) imamo

$$u_{i+1}^n = u_i^n + \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i^n + \frac{1}{6} \Delta x^3 \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_i^n + O(\Delta x^4) \quad (3.3)$$

$$u_{i-1}^n = u_i^n - \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i^n - \frac{1}{6} \Delta x^3 \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_i^n + O(\Delta x^4) \quad (3.4)$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta t \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_i^n + O(\Delta t^2) \quad (3.5)$$

gdje $O(\Delta x^4)$ i $O(\Delta t^2)$ predstavlja sve ostale izraze u Taylorovom redu. Zbrajanjem (3.3) i (3.4) imamo

$$u_{i+1}^n + u_{i-1}^n = 2u_i^n + \Delta x^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i^n + O(\Delta x^4)$$

ili

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i^n = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2) \quad (3.6)$$

što predstavlja aproksimaciju prostorne derivacije drugog reda a nazivamo je aproksimacijom *centralnom razlikom*.

Uređenjem (5.5) dobivamo aproksimaciju vremenske derivacije koju zovemo asproksimacijom *razlikom*

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^n = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t^2) \quad (3.7)$$

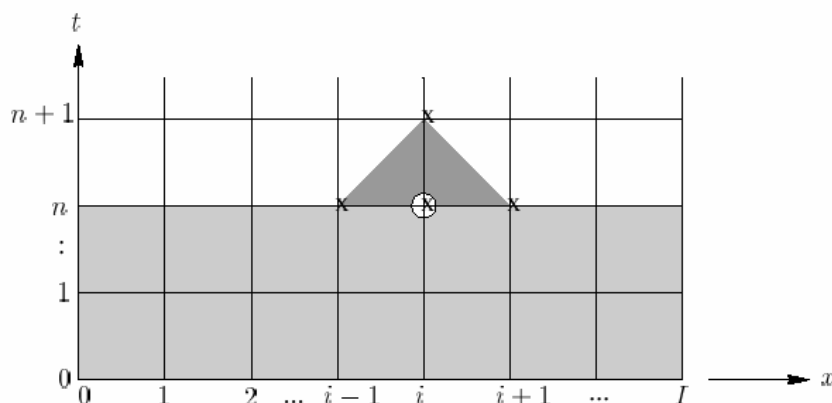
Uvrštenjem (5.6) i (5.7) u (5.1) dobijemo aproksimaciju konačnih razlika

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t^2) = k \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta x^4) \quad (3.8)$$

odnosno eksplicite po u_i^{n+1} , gdje je on funkcija n -tog vremenskog koraka

$$u_i^{n+1} = u_i^n + k \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) + O(\Delta t^2, \Delta x^2) \quad (3.8)$$

Davanjem početnih uvjeta za u_i^n pri $n = 0$ (tj. $t = 0$), vrijednosti u_i^{n+1} za novi vremenski korak su nađene formulom (5.8), gdje je $i = 1, 2, \dots, I$. Formula (5.8) je nazvana *eksplicitna* formula konačnih razlika, jer vrijednost u_i^{n+1} ovisi o vrijednostima u_i^n ($i = 1, 2, \dots, I$) prethodnog vremenskog koraka.



Slika 3.1: Mreža konačnih razlika za rješavanje nestacionarnog 1D vođenja topline. Jednadžba je centrirana na čvor mreže (i, n) označen kružićem. Područje već poznatog rješenja do n -tog koraka je lagano osjenčano. Eksplicitna formula, sa centralnom razlikom u x i prednjom razlikom u t , daje rješenja za $(n+1)$ -ti vremenski korak pomoću rješenja tri čvora n -tog koraka (prikazano tamno osjenčanim trokutom).

Stabilnost rješenja

Nastojanje povećanja točnosti približnog rješenja proglašavanjem diskretizacije (kraći koraci), broj numeričkih operacija se značajno povećava, tako da kumulativne greške zaokruživanja mogu dati konačno rješenje gore od onog s rjeđom diskretizacijom. Numerički postupak je stabilan ako se mala pogreška iz nekog stanja ne uvećava u proračunu sljedećeg. Stabilnost je zadovoljena ako je ispunjen *Courantov* uvjet:

$$k \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2} \quad (3.9)$$

Von Neumannova analiza stabilnosti [1] pokazuje da je stabilnost osigurana ako je za vremenski korak uzeto

$$\Delta t \geq \frac{\Delta x^2}{4k} \quad (3.10)$$

Aproksimacija višeg reda

Korištenjem aproksimacije višeg reda za vremensku derivaciju povećana je točnost i stabilnost. Npr., ako je aproksimacija centralnom razlikom korištena za $\frac{\partial u}{\partial t}$ centriranjem

jednadžbe na $\left(i \Delta x, \left(n + \frac{1}{2}\right) \Delta t\right)$ umjesto $(i \Delta x, n \Delta t)$, dobijemo

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^{n+\frac{1}{2}} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t^2) \quad (3.11)$$

pa je jednadžba (5.1) aproksimirana *Crank-Nicolsonovom* formulom

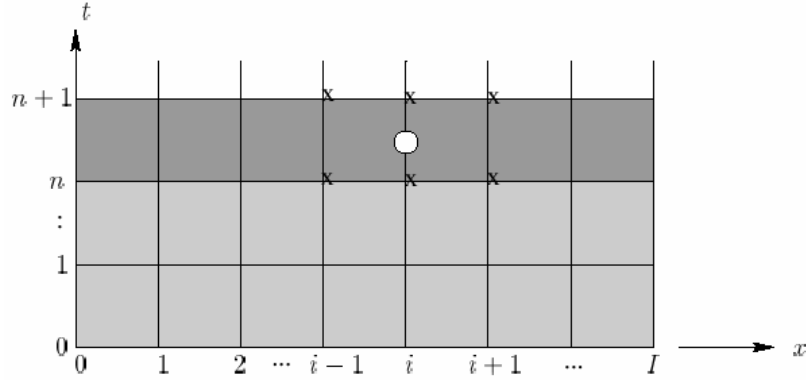
$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = k \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^{n+1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^n \right\} \quad (3.12)$$

u kojoj se prostorne derivacije drugog reda množene s težinskim faktorom $\frac{1}{2}$ na starom vremenskom koraku n i novom vremenskom koraku $n + 1$. Primjećujemo da se konačnom razlikom izražena vremenska derivacija nije promjenila. Promjenila se samo vremenska pozicija u kojoj je centrirana. Cijena plaćena za bolju točnost (za dati Δt) i neuvjetnu stabilnost (tj., stabilno za sve Δt) je, da je jednadžba (5.18) *implicitna*. To znači da za nove vremenske korake u_i^{n+1} ovisi o susjednim izrazima u_{i+1}^{n+1} i u_{i-1}^{n+1} . Tako novi vremenski korak zahtjeva rješavanje sustava jednadžbi.

Generalizacija (3.12) je

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = k \left\{ \Theta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^{n+1} + (1 - \Theta) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^n \right\} \quad (3.13)$$

gdje su prostorne derivacije drugog reda jednadžbe(5.1) množene s težinskim faktorom Θ na starom vremenskom koraku n i težinskim faktorom $(1-\Theta)$ na novom vremenskom koraku $(n + 1)$. Orginalna eksplicitna prednja razlika (3.8) se dobije kada $\Theta = 0$, a implicitna centralna razlika (Crank-Nicolson) (3.13) kada $\Theta = \frac{1}{2}$. Implicitna unatrag razlika je ostvarena kada $\Theta = 1$.



Slika 3.2: Implicitni oblik konačnih razlika baziran na centralnim razlikama za t i x , što povezuje zajedno šest čvorova označenih križićem. Jednadžba je centrirana u točki $(i, n + \frac{1}{2})$ označena kružićem.

Nestacionarna advekcijsko-difuzijska jednadžba prijenosa

Razmotrimo linearnu paraboličku jednadžbu

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \nabla u = k \nabla^2 u + f \quad (3.14)$$

gdje je u temperatura (ili koncentracija), $v \nabla u$ advektivni transport (u slučaju konvekcijskog prijenosa topline) sa poljem brzina v , k je koeficijent toplinske vodljivosti (ili koeficijent difuzije) a f je izraz za izvor (generaciju). Omjer advektivnog i difuzivnog transporta je karakteriziran Pecletovom značajkom $Pe = \frac{vL}{k}$, gdje je L karakteristična duljina.

Primjenom Galjerkinove metode težinskog ostatka jednadžba (3.14) s težinama ω postaje

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + v \nabla u - k \nabla^2 u + f \right) \omega d\Omega = 0$$

ili, primjenom Green-Gausovog teorema

$$\int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} + v \nabla u \right) \omega + k \nabla u \nabla \omega \right] d\Omega = \int_{\Omega} f d\Omega + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \omega d\Gamma \quad (3.15)$$

gdje je $\frac{\partial}{\partial n}$ derivacija po normali na granici $\partial\Omega$. Stavljanjem $u = \varphi_n u_n$ i $\omega = \varphi_m$ i sumiranjem elemenata u globalnu jednadžbu, (3.15) je reprezentirana sustavom običnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda,

$$M \frac{\partial u}{\partial t} + K(u - u_{\infty}) = 0 \quad (3.16)$$

gdje je \mathbf{M} globalna kapacitivna matrica, \mathbf{K} globalna matrica vođenja topline i \mathbf{u} vektor globalnih nepoznanica ($t \rightarrow \infty \mathbf{u} = \mathbf{u}_\infty$). Matrice elemenata se računaju

$$M_{mn_e} = \int_{\Omega_e} \varphi_m \varphi_n J d\xi \quad (3.17)$$

$$K_{mn_e} = \int_0^1 k \frac{\partial \varphi_m}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_n}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} J d\xi + \int_0^1 v_j \varphi_m \frac{\partial \varphi_n}{\partial \xi_i} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} J d\xi \quad (3.18)$$

Diskretizacijom vremenske domene ($t = n\Delta t$, $n = 0, 1, 2, \dots$) jednačba (3.16) se zamjenjuje s

$$M \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} + K [\Theta u^{n+1} + (1 - \Theta)u^n] = K u_\infty \quad 0 < \Theta < 1 \quad (3.19)$$

gdje je Θ težinski faktor obrazložen u prethodnom poglavlju. Za $\Theta = 1/2$ metoda je poznata kao *Crank-Nicolson-Galjerkinova* metoda. Pogreška vremenske diskretizacije je $O(\Delta t^2)$. Preuređivanjem (5.19) u

$$[M + \Theta \Delta t K] u^{n+1} = [M - (1 - \Theta) \Delta t K] u^n + \Delta t K u_\infty \quad (3.20)$$

daje sustav linearnih algebarskih jednačba za rješavanje novog vremenskog koraka $(n + 1)\Delta t$ iz poznatih rješenja u^n na prethodnom vremenskom koraku $n\Delta t$.

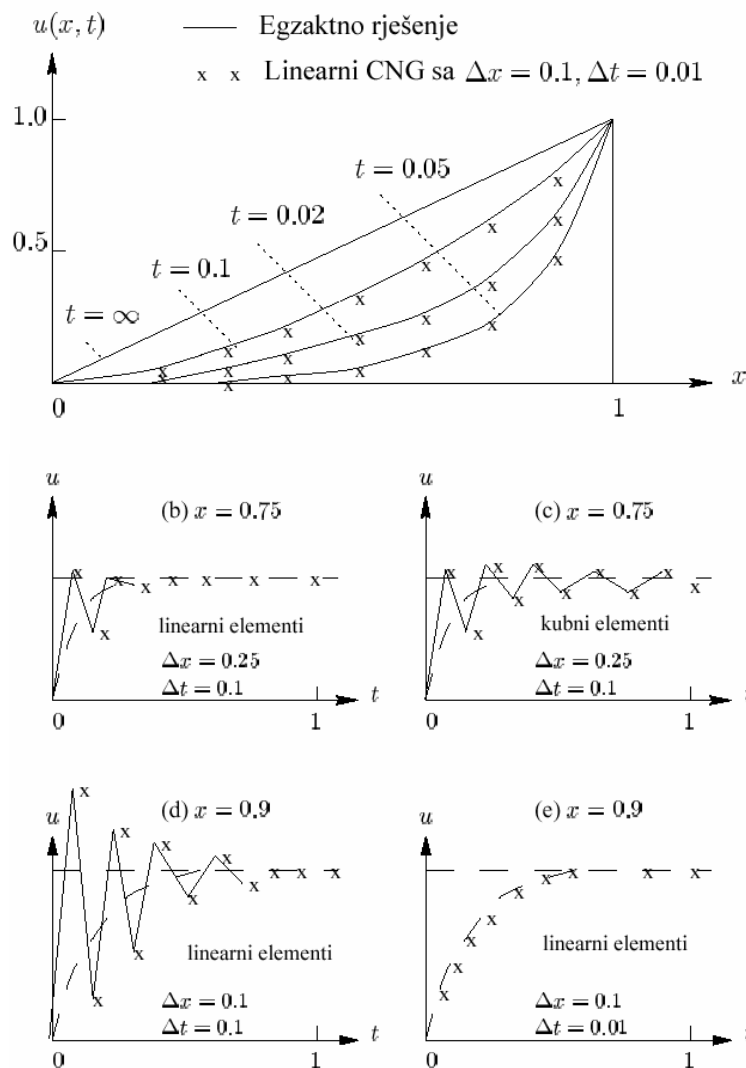
Na slici 3.3 riješena je 1D jednačba (difuzije) vođenja topline s mjenjanjem vremenskih inkremenata Δt i duljina elemenata Δx i to sa linearnim i kubnim Hermitovim elementima.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\begin{array}{ll} \text{početni uvjeti} & u(x, 0) = 0 \\ \text{granični uvjeti} & u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 1 \end{array} \quad (3.21)$$

Smanjenje Δx od 0.25 do 1 s linearnim elementima proizvodi veće oscilacije jer sustav ima više stupnjeva slobode koji vode većem osciliranju. Pri dovoljno malom Δt oscilacije su zanemarive (dolje desno, slika 3.3). Pri tim vrijednostima ($\Delta t = 0.01$) numeričko rješenje se dobro slaže sa egzaktnim (vrh, slika 3.3), koje je dato sa

$$u(x, t) = x + \frac{2}{\Pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-n^2 \Pi^2 t} \sin(n \Pi x)$$



Slika 3.3: Analitička i numerička rješenja nestacionarnog 1D vođenja topline prikazuju efekt veličine Δx i Δt .

Dijagonalizacija kapacitivne matrice

Po toj tehnici kapacitivna matrica M je zamjenjena dijagonalnom matricom čija je dijagonala jednaka sumi redova. Za primjer uzmimo kapacitivnu matricu (5.17) sa bilinearnim elementima (slika 1.9):

$$M_{11} = \iint (1-\xi_1)^2 (1-\xi_2) \xi_1 \xi_2 = -\frac{(1-\xi_1)^3}{3} \Big|_0^1 - \frac{(1-\xi_2)^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

$$M_{22} = \iint \xi_1^2 (1-\xi_2)^2 \xi_1 \xi_2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \quad \text{i sličli } M_{33} \text{ i } M_{44}.$$

$$M_{12} = \iint \xi_1 (1-\xi_1) (1-\xi_2)^2 \xi_1 \xi_2 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$$

$$M_{13} = \iint (1-\xi_1)^2 \xi_2 (1-\xi_2) \xi_1 \xi_2 = \frac{1}{18} \quad \text{i sličli } M_{34} \text{ i } M_{24}$$

$$M_{14} = \iint \xi_1 (1-\xi_1) \xi_2 (1-\xi_2) \xi_1 \xi_2 = \frac{1}{36} \quad \text{i sličli } M_{23}$$

Stoga,

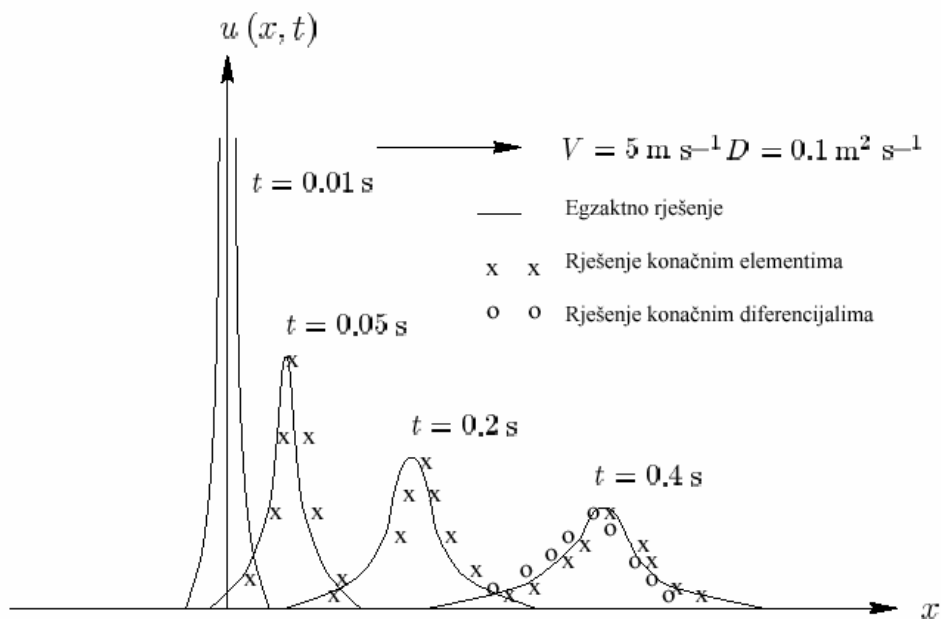
$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & \frac{1}{18} & \frac{1}{18} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{18} & \frac{1}{9} & \frac{1}{136} & \frac{1}{18} \\ \frac{1}{18} & \frac{1}{136} & \frac{1}{9} & \frac{1}{18} \\ \frac{1}{36} & \frac{1}{18} & \frac{1}{18} & \frac{1}{9} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Ovaj postupak ima računске prednosti kad je $\Theta = 0$ u jednadžbi (5.20) jer se svaka komponenta vektora \mathbf{u}^{n+1} izračunava direktno bez potrebe rješavanja sustava jednadžbi. Međutim ta eksplicitna vremenska integracija je uvjetno stabilna i pati od pojave faznog kašnjenja. Za jednako razmknute elemente, metoda konačnih elementa s dijagonalnom kapacitivnom matricom je ekvivalentna metodi konačnih razlika sa centralnim prostornim razlikama.

Na slici 3.4 vidimo usporedbu rješenja konačnim elementima i konačnim razlikama (tj., konačnim elementima sa dijagonalnom kapacitivnom matricom) 1D advekcije-difuzijske jednadžbe (3.14) sa $v = 5 \text{ m/s}$, $D = k = 0.1 \text{ m}^2/\text{s}$ i $f = 0$ za dobivanje odziva na jedinični impuls kod $x = 0$. Egzaktno rješenje je dato Gaussovom raspodjelom čija se varijanća povećava s vremenom.

$$u(x, t) = \frac{M}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{(x-vt)^2}{4Dt}}$$

Rješenje konačnim elementima, koja koristi Crank-Nicolson-Galjerkinovu tehniku, pokazuje odličnu amplitudnu i faznu karakteristiku kod usporedbe sa egzaktnim rješenjem. Rješenje konačnim razlikama (centralne vremenske razlike), ili konačnim elementima s dijagonalnom kapacitivnom matricom, reproducira amplitude impulsa vrlo dobro ali pokazuje malo fazno kašnjenje.



Slika 3.4: Advekcio-difuzijski odziv na jedinični impuls. $\Delta x = 0.1$, $\Delta t = 0.001 \text{ s}$ za $0 < t < 0.01 \text{ s}$ i $\Delta t = 0.01 \text{ s}$ za $t \geq 0.01 \text{ s}$.

V Literatura

1. Peter Hunter, Andrew Pullan: FEM/BEM notes, Department of Engineering Science
The University of Auckland, New Zealand 2003.
2. Vinko Jović: Uvod u inženjersko numeričko modeliranje, Aquarius engineering, Split
1993.